

# Određivanje naprezanja u kritičnim presjecima grede s prepustom

---

**Bradić, Jakov**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2025**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:833792>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-14**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)





Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Jakov Bradić

**ODREĐIVANJE NAPREZANJA U KRITIČNIM  
PRESJECIMA GREDE S PREPUSTOM**

ZAVRŠNI ISPIT

Zagreb, 2025.



OBRAZAC 3

POTVRDA O POZITIVNOJ OCJENI PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA

Student/ica :

(Ime i prezime)

(JMBAG)

zadovoljio/la je na pisanom dijelu završnog ispita pod naslovom:

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

(Naslov teme završnog ispita na engleskom jeziku)

i predlaže se provođenje daljnjeg postupka u skladu s Pravilnikom o završnom ispitu i diplomskom radu Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta.

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu znanstvenog projekta: (upisati ako je primjenjivo)

(Naziv projekta, šifra projekta, voditelj projekta)

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu stručne prakse na Fakultetu: (upisati ako je primjenjivo)

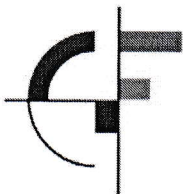
(Ime poslodavca, datum početka i kraja stručne prakse)

Datum:

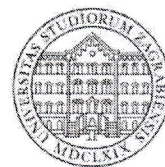
Mentor:

Potpis mentora:

Komentor:



Sveučilište u Zagrebu  
Građevinski fakultet



OBRAZAC 5

IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja:

Jakov Bradić, 0082064838

(Ime i prezime, JMBAG)

student/ica Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta ovim putem izjavljujem da je moj pisani dio završnog ispita pod naslovom:

Određivanje naprezanja u kritičnim presjecima grede s prepustom

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

izvorni rezultat mogega rada te da se u izradi istoga nisam koristio/la drugim izvorima osim onih koji su u njemu navedeni.

Datum:

20.1.2025

Potpis:



OBRAZAC 6

IZJAVA O ODOBRENJU ZA POHRANU I OBJAVU PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA

Ja :

Jakov Bradić 0082064838

(Ime i prezime, OIB)

ovom izjavom potvrđujem da sam autor/ica predanog pisanog dijela završnog ispita i da sadržaj predane elektroničke datoteke u potpunosti odgovara sadržaju dovršenog i obranjenog pisanog dijela završnog ispita pod naslovom:

Određivanje naprezanja u kritičnim presjecima grede s prepustom

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

koji je izrađen na sveučilišnom prijediplomskom studiju Građevinarstvo Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta pod mentorstvom:

prof. dr. sc. Diana Šimić Penava

(Ime i prezime mentora)

i obranjen dana:

(Datum obrane)

Suglasan/suglasna sam da pisani dio završnog ispita bude javno dostupan, te da se trajno pohrani u digitalnom repozitoriju Građevinskog fakulteta, repozitoriju Sveučilišta u Zagrebu te nacionalnom repozitoriju.

Datum:

20.1.2025.

Potpis:

Jakov Bradić



Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Jakov Bradić

**ODREĐIVANJE NAPREZANJA U KRITIČNIM  
PRESJECIMA GREDE S PREPUSTOM**

ZAVRŠNI ISPIT

prof. dr. sc. Diana Šimić Penava

Zagreb, 2025.



University of Zagreb

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Jakov Bradić

**STRESS DETERMINATION IN THE CRITICAL  
CROSS-SECTIONS OF A BEAM WITH AN  
OVERHANG**

FINAL EXAM

Prof. Diana Šimić Penava, PhD

Zagreb, 2025.

## SAŽETAK

U ovom radu obraditi ćemo temu određivanja naprezanja u kritičnim presjecima u gredama s prepustom. Objasniti ćemo kako i kada dolazi do čistog savijanja te njegove karakteristike. Poblježe ćemo ući u pokazivanje svrhe neutralne osi te kako dolazimo do normalnih naprezanjima. Dotaknuti ćemo se savijanja silama ili poprečnog naprezanja te ćemo pokazati kako određujemo posmična i glavna naprezanja te njihove trajektorije. Numeričkim primjerom ćemo pokazati kako odrediti maksimalna normalna i posmična naprezanja za gredu s prepustom.

**Ključne riječi:** Čisto savijanje, neutral os, normalna naprezanja, savijanje sa silama ili poprečno savijanje, posmična naprezanja, glavna naprezanja, trajektorije naprezanja



## SUMMARY

In this paper, we will discuss the topic of stress determination in critical sections in beams with an overhang. We will explain how and when pure bending occurs and its characteristics. We will take a closer look at showing the purpose of the neutral axis and how we arrive at normal stresses. We will touch on force bending or transverse stress and we will show how we determine shear and principal stresses and their trajectories. Using a numerical example, we will show how to determine the maximum normal and shear stresses for a beam with an overhang.

**Key words:** Pure bending, neutral axis, normal stresses, bending with forces or transverse bending, shear stresses, principal stresses, stress trajectories

## POPIS SLIKA

Slika 1: Odabir presjeka a-a [2].....	2
Slika 2: Izoliarni dio grede [2] .....	2
Slika 3: Primjer čistog savijanja [2] .....	3
Slika 4: Primjer opterećene grede [2].....	3
Slika 5: Primjer nepomičnosti središnjih točaka koje rezultiraju ostajanju ravnine poprečnog presjeka [2].....	5
Slika 6: Prikaz pravokutne mreže pri savijanju ravnog štapa [2].....	6
Slika 7: Prikaz presjeka $n - n$ i $m - m$ [2].....	7
Slika 8: Prikaz dijagrama normalnih naprezanja za bilo kakav presjek s horizontalnom osi simetrije te prikaz prostornog dijagrama normalnih naprezanja za pravokutni presjek [2].	11
Slika 9: Prikaz dokaza da raspodjela normalnih naprezanja u poprečnome presjeku, ne ovisi o obliku poprečnoga presjeka [2]..	13
Slika 10: Prikaz štapa s jednom osi simetrije i opterećenjem u $(x, z)$ ravnini [2] .....	14
Slika 11: Primjer izdvojenog dijela štapa [2].....	15
Slika 12: Primjer vitoperenja [2]. .....	16
Slika 13: Primjer različitih presjeka štapova [2]. .....	17
Slika 14: Primjer raspodjele posmičnih naprezanja $\tau_{xz}$ i $\tau_{xy}$ [2].....	19
Slika 15: Primjer raspodjele posmičnih naprezanja za pravokutni presjek [2].....	20
Slika 16: Primjer raspodjele posmičnih naprezanja za kružni presjek [2].....	21
Slika 17: Primjer raspodjele posmičnih naprezanja za trokutni presjek [2].....	23
Slika 18: Primjer raspodjele posmičnih naprezanja za I-presjek [2].....	24
Slika 19: Prikaz presijecanja pojasa vertikalnom ravninom [2].....	26
Slika 20: Prikaz ravnoteže elementa izrezanog na desnom kraju pojasa [2].....	28
Slika 21: Primjer ravninskog stanja naprezanja za proizvoljnu C točku [2] .....	29
Slika 22: Prikaz Mohrove kružnice za ravninsko stanje naprezanja [2].....	30
Slika 23: Prikaz nosača pravokutnog poprečnog presjeka [2] .....	31
Slika 24: Prikaz stanja naprezanja u pojedinim točkama poprečnoga presjeka te dijagrami normalnih, posmičnih, glavnih normalnih i glavnih posmičnih naprezanja [2] .....	31
Slika 25: Dijagrami momenta (prvi dijagram) i poprečnih sila (drugi dijagram) od vanjskih sila AutoCAD Autodesk 2025.....	34
Slika 26: Prikaz dijagrama maksimalnih i minimalnih glavnih naprezanja te posmičnih naprezanja AutoCAD Autodesk 2024. ....	38
Slika 27: Prikaz trajektorija glavnih naprezanja AutoCAD Autodesk 2024.....	40

---

## SADRŽAJ

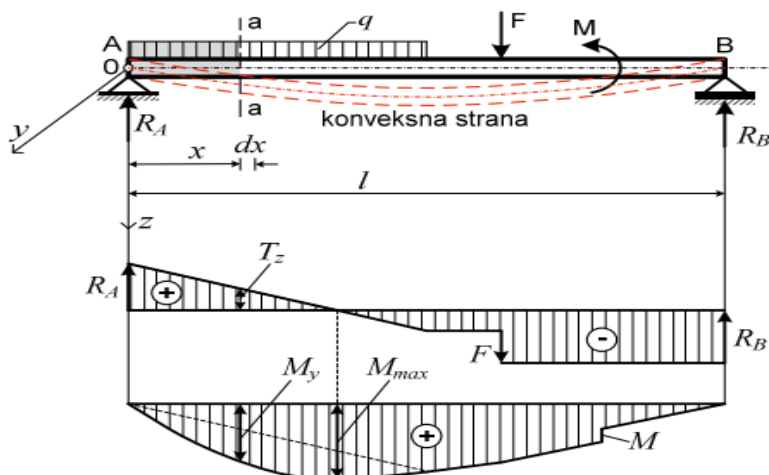
SAŽETAK .....	i
SUMMARY .....	ii
POPIS SLIKA .....	iii
SADRŽAJ .....	iv
1. UVOD .....	1
2. GLAVNI UZROCI NAPREZANJA .....	3
2.1. Čisto savijanje.....	3
2.2. Neutralna os.....	7
2.3. Normalna naprezanja .....	11
2.4. Savijanje sa silama ili poprečno savijanje .....	14
2.5. Posmična naprezanja.....	19
2.6. Glavna naprezanja i trajektorije naprezanja .....	29
3. NUMERIČKI PRIMJER.....	33
3.1. Prvi numerički primjer – maksimalna normalna i posmična naprezanja .....	33
3.2. Drugi numerički primjer – izračun veličine i smjera glavnih naprezanja u točki C .....	37
4. ZAKLJUČAK .....	41
POPIS LITERATURE .....	42

## 1. UVOD

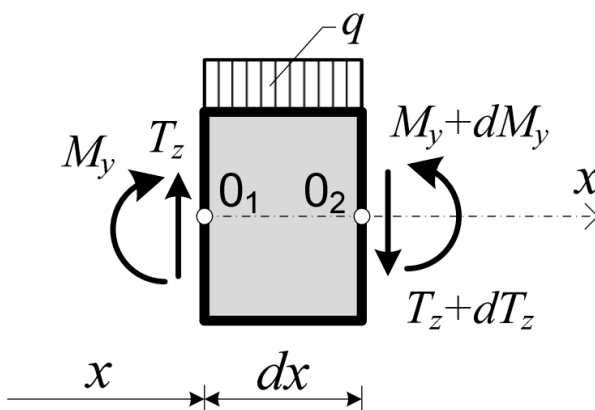
Određivanje naprezanja predstavlja ključan dio građevinske struke, kako bi se postigla maksimalna sigurnost, kvaliteta i dugovječnost. Određivanje naprezanja uvjetuje precizno analiziranje opterećenja, tipa grede, izračunavanje geometrijskih faktora, izračunavanje maksimalnih opterećenja te finalno pronalaženje adekvatnih naprezanja za neki sistem. Također u određivanje naprezanja mogu ući faktori kao što su modul elastičnosti, modul posmika, te torzija, ali zbog potrebe rada, reći ćemo da su oni konstantni. Naprezanje je unutarnja sila raspodijeljena po jedinici površine nekoga čvrstog tijela koja se javlja kao reakcija na djelovanje vanjskih sila ili promjene temperature tijela, s jedinicom paskal ( $\text{Pa} = \text{N}/\text{m}^2$ ). Promatrati ćemo gredu s prepustom. Prvo korak i ujedno najbitniji dio određivanja je pronalazak reakcija ležajeva, relativno na teret koji imamo, putem diferencijalnih jednadžba ravnoteže. Da bi mogli krenuti sa daljnjom računicom, prvo i osnovno nam zbroj svih sila i momenata u bilo kojem smjeru treba biti nula, kako bi utvrdili da sustav nije mehanizam. Komponente naprezanja su neprekinute funkcije koordinata  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x, y, z)$  paralelopipeda, pa na njegovim pobočkama ne djeluju komponente naprezanja jednake veličine. Pošto su te komponente različite, možemo te razlike izraziti preko diferencijalnih prirasta na razmacima  $dx, dy, dz$ . Također, uz pretpostavku da postoje volumenske sile  $F_x, F_y, F_z$  koje djeluju na jedinicu volumena, možemo izvesti 6 jednadžbi ravnoteže, koje glase:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0, \sum M_x = 0, \\ \sum F_y &= 0, \sum M_y = 0, \\ \sum F_z &= 0, \sum M_z = 0,\end{aligned}\tag{1}$$

Nakon što odredimo potrebne reakcije i nacrtamo adekvatne dijagrame, na momentnom dijagramu **metodom prereza** ćemo odrediti unutarnje sile na točkama gdje ne znamo točnu vrijednost momenta savijanja.



Slika 1. Odabir presjeka a-a [2]



Slika 2. Izolirani dio grede [2]

Iz uvjeta ravnoteže dobiti ćemo diferencijalne zavisnosti pri savijanju koje glase:

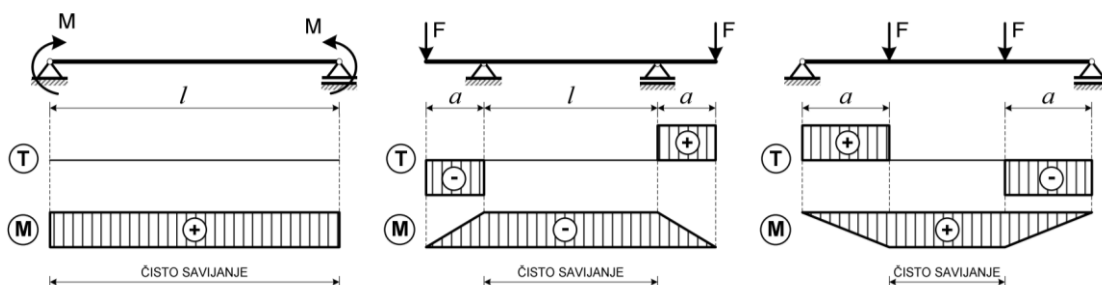
$$\frac{dT}{dx} = -q, \quad \frac{dM}{dx} = T_z, \quad \frac{d^2 M_y}{dx^2} = -q$$

(2)

## 2. GLAVNI UZROCI NAPREZANJA

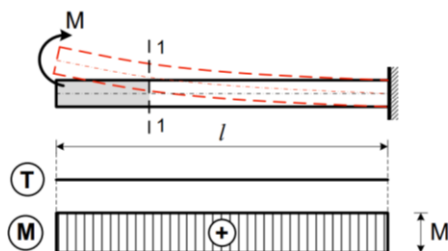
### 2.1. ČISTO SAVIJANJE

Jedno od, ako ne i najopasnije djelovanje na gredu je moment savijanja koji uzrokuje znatna naprezanja u gredi. Ako se u poprečnom presjeku grede pojavljuju samo poprečna sila i moment savijanja, takvo savijanje ćemo nazvati **poprečno savijanje** ili **savijanje silama**. Ako se u poprečnim presjecima štapa nalazi isključivo **moment savijanja**, to savijanje nazivamo **čisto savijanje**. Ako se ravnina djelovanja momenta savijanja poklapa s jednom od glavnih središnjih osi tromosti poprečnoga presjeka grede, savijanje se naziva **obično savijanje** ili **ravno savijanje**.



Slika 3. Primjeri čistog savijanja [2]

Neka je ravna greda konstantnoga poprečnog presjeka od homogenog, izotropnog i elastičnog materijala opterećenog prema slici



Slika 4. Primjer opterećene grede [2]

Nakon što gredu prerežemo presjekom 1-1, promatrati ćemo uvjete ravnoteže lijevog dijela grede pod djelovanjem vanjskog momenta  $M$  te unutarnjih sila koje su se pojavile zbog našeg prereza. Odabiremo koordinatni sustav  $x, y, z$  tako da se os  $z$  poklapa s presječnicom ravnine poprečnoga presjeka i ravnine opterećenja koja prolazi kroz uzdužnu os štapa. Na bazi ovih podataka možemo postaviti šest uvjeta ravnoteže:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; \quad N &= \int_A \sigma_x dA = 0 \\ \sum F_y = 0; \quad T_y &= \int_A \tau_{xy} dA = 0 \\ \sum F_z = 0; \quad T_z &= \int_A \tau_{xz} dA = 0 \\ \sum M_x = 0; \quad M_x = M_t &= \int_x (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA = 0 \\ \sum M_y = 0; \quad M_y = M_s &= \int_x \sigma_x z dA = M \\ \sum M_z = 0; \quad M_z &= \int_x \sigma_x y dA = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

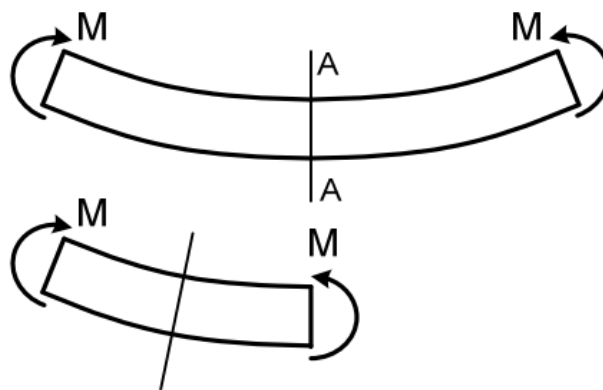
Prema tome, u promatranome presjeku grede djeluje samo moment  $M_s$ , a ostale komponente unutarnjih sila su jednake nuli. Pošto su poprečne sile u  $z$  i  $y$  smjeru te  $M_t$  jednaki nuli, možemo zaključiti da su posmična naprezanja u presjeku 1-1 jednaka nuli i da na element površine  $dA$  presjeka djeluje samo unutarnja sila  $\sigma_x dA$ . Tako da možemo eliminirati tri od šest jednadžbi, odnosno, jednadžbe koje će ostati su:

$$\begin{aligned} \int_A \sigma_x dA &= 0 \\ \int_x \sigma_x z dA &= M \\ \int_x \sigma_x y dA &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Te tri jednadžbe nisu dovoljne za određivanje naprezanja jer ne znamo zakon raspodjele naprezanja u ravnini poprečnog presjeka. Zbog toga moramo provjeriti deformaciju grede.

Pod utjecajem momenta greda se savija. Pošto je moment savijanja u svim poprečnim presjecima jednak te su svi dijelovi štapa u identičnim uvjetima, zakrivljenost grede svih dijelova mora biti jednaka. Prema tome, uzdužna os grede prelazi u krivulju koja ima konstantnu zakrivljenost, a to je kružni luk.

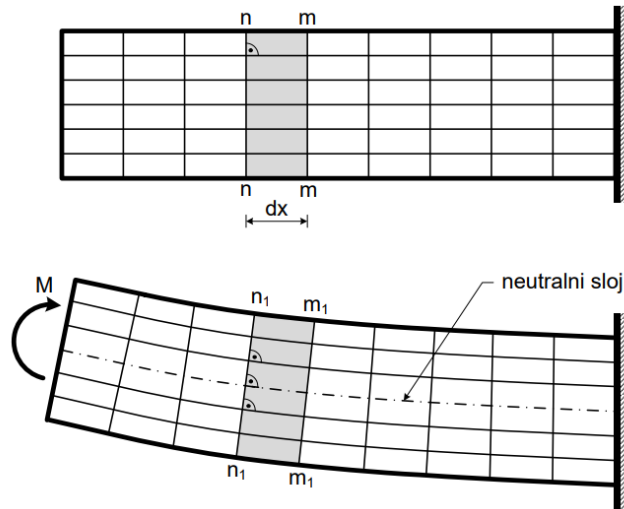
Pod pretpostavkom da krajnji presjeci štapa pri čistom savijanju ostaju ravni, vrlo lako možemo pokazati da ravni poprečni presjeci ostaju ravni pri deformaciji štapa i okomiti na savijenu os štapa. Točke presjeka ne mogu biti pomaknute zbog uvjeta simetrije, odnosno srednji presjek ostaje ravan i okomit na os štapa. [1]



Slika 5. Primjer nepomičnosti središnjih točaka koje rezultiraju ostajanjem ravnine poprečnog presjeka [2]

Ako postavimo pravokutnu mrežu na površini štapa gdje su uzdužne linije paralelne s osi štapa, a poprečne linije predstavljaju siluete poprečnih presjeka, nakon opterećenja, uzdužne linije se pretvaraju u kružne lukove, a okomite se zaokreću, ali ostaju ravne i okomite na kružne lukove. Pravokutna mreža ostaje pravokutna, čak i nakon deformacija, što potvrđuje tezu da su **posmična naprezanja u poprečnom presjeku jednaka nuli**. U samom štapu postoje uzdužna vlakna koja se na konkavnoj strani štapa skraćuju, a na konveksnoj produljuju. Također, postoji sloj čija se vlakna savijaju i zadržavaju svoju originalnu duljinu. Taj sloj zovemo **neutralni sloj**. [1]





Slika 6. Prikaz pravokutne mreže pri savijanju ravnog štapa [2].

## 2.2. NEUTRALNA OS

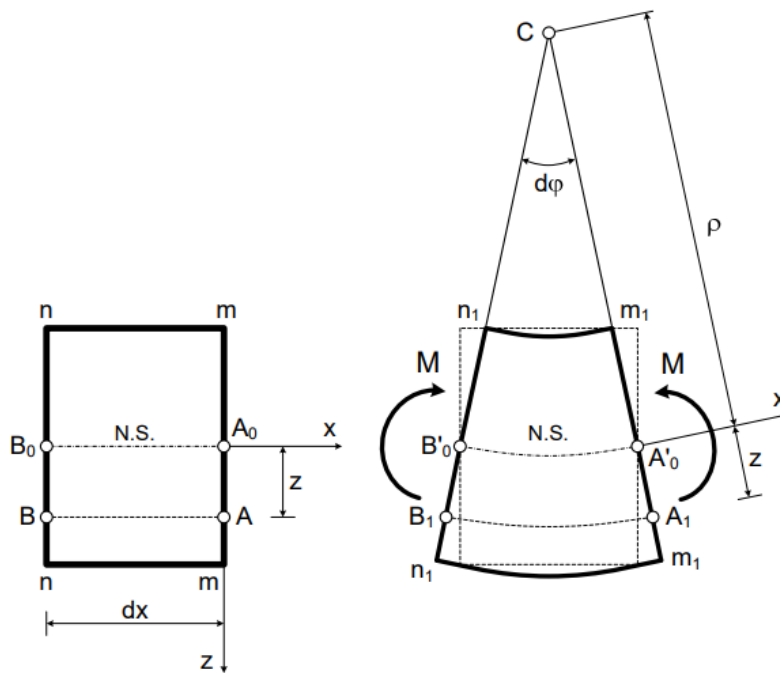
Vlakna koja pripadaju u prijašnje navedenom neutralnom sloju, prije deformacije leže u jednoj ravnini, a tijekom deformiranog stanja tvore cilindričnu plohu. **Presječnica neutralnoga sloja i ravnine poprečnoga presjeka naziva se neutralna os presjeka.**

Iz jednadžbi ravnoteže, slijedi da se unutarnje sile vode na spreg sila koji je u ravnoteži s momentom savijanja u danome presjeku. Odnosno, u poprečnome presjeku djeluju normalna naprezanja različitih predznaka. Zbog činjenice da su ta naprezanja raspoređena konitnuirano po presjeku, moraju postojati točke koje zadovoljavaju  $\sigma_x = 0$ . Te točke određuju **neutralnu os presjeka**. Neutralna os dijeli presjek na dva dijela. Jedan u kojemu su vlačna naprezanja te drugi u kojemu su tlačna.

Uzimamo kao primjer dva poprečna presjeka  $n - n$  i  $m - m$  sa elementom štapa duljine  $dx$ .

Poprečni presjeci  $n - n$  i  $m - m$  zaokreću se jedan prema drugom, a prilikom zaokretanja ostaju ravni. Prilikom zaokretanja, presjeci se **zaokreću oko svojih neutralnih osi za kut  $d\varphi$** .

Relativno produljenje vlakana možemo opisati preko jednadžbe: [1]



Slika 7. Prikaz presjeka  $n - n$  i  $m - m$  [2]

$$\varepsilon_{xx} = \frac{(\rho+z)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi}, \quad (5)$$

odnosno:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{z}{\rho}$$

(6)

Iz ovoga vidimo da su deformacije  $\varepsilon_{xx}$  uzdužnih vlakana proporcijonalne njihovoj udaljenosti od neutralne osi.

Veza između deformacija i naprezanja u poprečnome presjeku čije se uzdužno vlakno nalazi u jednoosnom rastezanju se može izraziti **Hookeovim zakonom**:

$$\sigma_x = \varepsilon_{xx} E$$

(7)

$$\sigma_x = \frac{E}{\rho} z$$

(8)

Ako prenesemo Hookeov zakon na jednadžbe "(4)", slijedi da su normalna naprezanja pri čistom savijanju konstantna po širini presjeka, a po visini poprečnoga presjeka, mijenjaju se ovisno o udaljenosti  $z$  od neutralne osi. To je direktna posljedica **Bernoullieve hipoteze ravnih poprečnih presjeka**. [2]

$$\int \frac{E}{\rho} z dA = 0$$

(9)

Zbog činjenice da su modul elastičnosti  $E$  i polumjer zakrivljenosti  $\rho$  konstantni, mogu se izvući ispred znaka intergala:

$$\frac{E}{\rho} \int z dA = 0$$

(10)

Te ih možemo eliminirati jer  $\frac{E}{\rho} \neq 0$ , pa jednadžba rezultira

$$\int_A z dA = 0 = S_y$$

(11)

Ovaj intergral definira statički moment presjeka u obziru na neutralnu os. Odnosno, **neutralna os y prolazi težištem presjeka.**

Ako u jednadžbu ravnoteže  $\int_x \sigma_x y dA = 0$  uvrstimo  $\sigma_x = \frac{E}{\rho} z$ , dobivamo:

$$\int_x \sigma_x y dA = \frac{E}{\rho} \int z y dA = 0$$

(12)

Budući da je  $\frac{E}{\rho} \neq 0$ , to je:

$$\int_A z y dA = 0 = I_{zy}$$

Odnosno, upravo smo izrazili centrifugalni moment tromosti presjeka s obzirom na osi z i y

Ako u jednadžbu ravnoteže  $\int_x \sigma_x z dA = M$  uvrstimo  $\sigma_x = \frac{E}{\rho} z$ , dobivamo:

$$\int_x \sigma_x z dA = \frac{E}{\rho} \int z^2 dA = M$$

(13)

A također znamo da je  $I_y = \int z^2 dA$ , pa dobivamo

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_y}$$

(14)

Gdje je  $\frac{1}{\rho}$  **zakrivljenost neutralnoga sloja nosača**, koja se još naziva kao **elastična ili progibna linija štapa.**

Pri čistom savijanju štapa (  $M = konst.$  ) od homogenog materijala (  $E = konst.$  ) i konstantnog promjera poprečnog presjeka (  $I_y = konst.$  ) os štapa savija se po kružnom luku promjera [1]:

$$\rho = \frac{EI_y}{M}$$

(15)

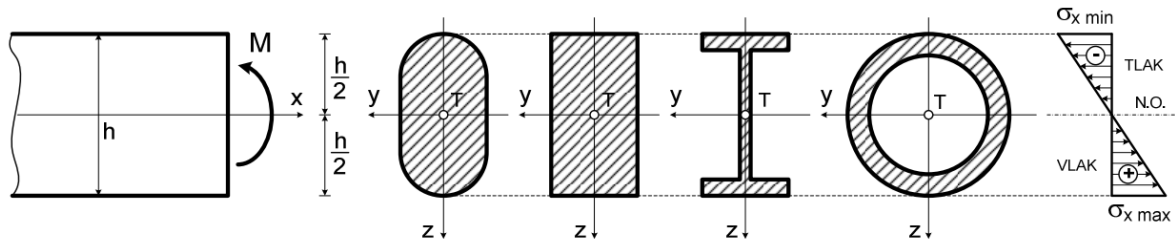
Konačno, ako uvrstimo  $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_y}$  u  $\sigma_x = \frac{E}{\rho} z$ , dobimo:

$$\sigma_x = \frac{M}{I_y} z$$

(16)

### 2.3. NORMALNA NAPREZANJA

Pomoću izraza (16) možemo odrediti normalna naprezanja  $\sigma_x$  u bilo kojoj točki presjeka pod uvjetom da odredimo moment savijanja i moment tromosti presjeka.



Slika 8. Prikaz dijagrama normalnih naprezanja za bilo kakav presjek s horizontalnom osi simetrije te prikaz prostornog dijagrama normalnih naprezanja za pravokutni presjek [2]

Uzdužna vlakna su izložena **pritisku ili rastezanju** ovisno jesu li **iznad ili ispod neutralne osi**. **Ako moment savijanja ima suprotan predznak, gornja vlakna bi bila izložena rastezanju, a donja pritisku.**

U najudaljenijim, odnosno krajnjim, vlaknima, relativno na neutralnu os, normalna naprezanja poprimaju ekstremne vrijednosti. [1]

U slučaju presjeka s horizontalnom osi simetrije  $y$ , za  $z = \mp \frac{h}{2}$  dobivamo:

$$\sigma_{xmax} = \frac{M}{I_y} \frac{h}{2} \quad (17)$$

$$\sigma_{xmin} = -\frac{M}{I_y} \frac{h}{2} \quad (18)$$

Također jer vrijedi izraz aksijalnog momenta otpora poprečnog presjeka s obzirom na neutralnu os  $y$ :

$$\frac{I_y}{\frac{h}{2}} = W_y \tag{19}$$

Dobivamo:

$$\begin{aligned} \sigma_{xmax} &= \frac{M}{W_y} \\ \sigma_{xmin} &= -\frac{M}{W_y} \end{aligned} \tag{20}$$

Odnosno:

$$|\sigma_{xmax}| = |\sigma_{xmin}| = \frac{M}{W_y} \tag{21}$$

Ako poprečni presjek nema horizontalnu os simetrije, tj. Neutralna os presjeka ne prolazi sredinom visine presjeka, već je udaljena od krajnjih vlakana za  $z_{max} = h_1$  i  $z_{min} = h_2$ , dobivamo:

$$\begin{aligned} \sigma_{xmax} &= \frac{M}{I_y} h_1 \\ \sigma_{xmin} &= -\frac{M}{I_y} h_2 \end{aligned} \tag{22}$$

Te uz pomoć izraza  $\frac{I_y}{h_1} = W_{y_1}$  i  $\frac{I_y}{h_2} = W_{y_2}$ , aksijalni momenti otpora presjeka s obzirom na neutralnu os  $y$ , dobivamo:

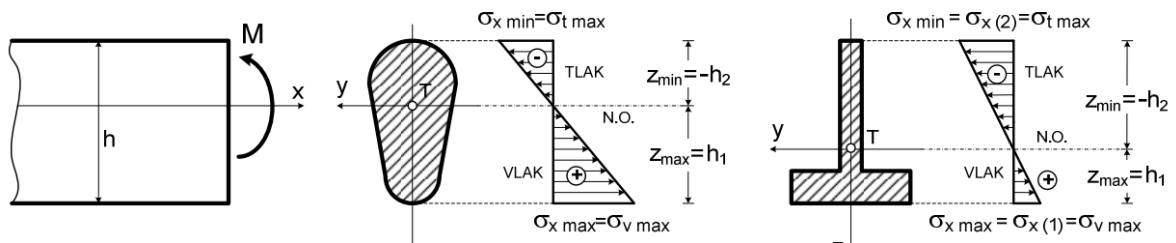
$$\sigma_{xmax} = \sigma_{x(1)} = \frac{M}{W_{y_1}}$$

$$\sigma_{xmin} = \sigma_{x(2)} = -\frac{M}{W_{y_2}}$$

(23)

Odnosno, vidimo da je:

$$|\sigma_{xmax}| \neq |\sigma_{xmin}|$$

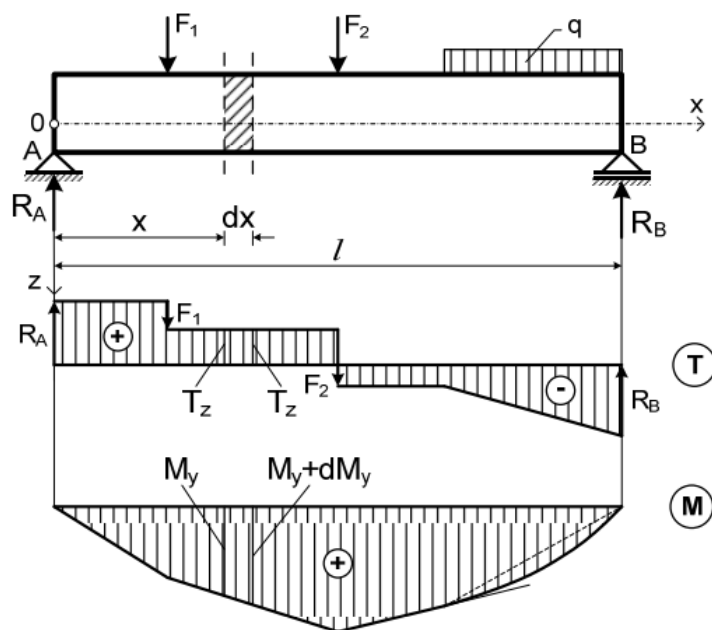


Slika 9. Prikaz dokaza da raspodjela normalnih naprezanja u poprečnome presjeku, ne ovisi o obliku poprečnoga presjeka [2].



## 2.4. SAVIJANJE SA SILAMA ILI POPREČNO SAVIJANJE

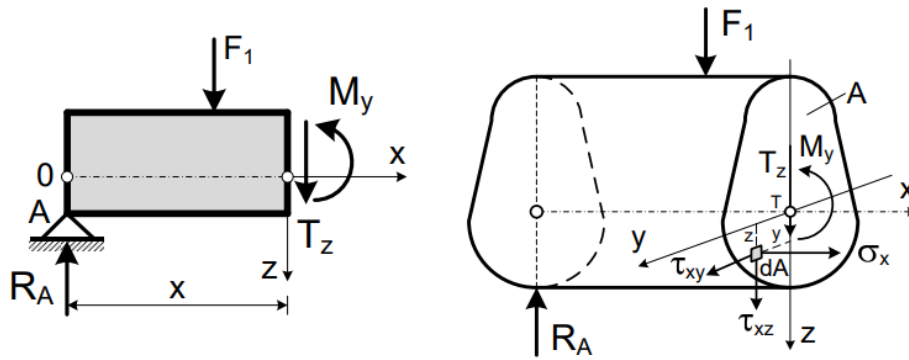
Ako promatramo štap konstantnoga poprečnoga presjeka, koji ima jednu os simetrije  $z$  ( $I_{xz} = 0$ ) i opterećen je sa silama koje leže u ravnini  $(x, z)$ , u istoj toj ravnini se odvija i savijanje štapa, tako da se ravnina savijanja poklapa s ravninom štapa. [1]



Slika 10. Prikaz štapa s jednom osi simetrije i opterećenjem silama u  $(x, z)$  ravnini [2]

Također, uz moment savijanja  $M_y$  se javlja i poprečna sila  $T_z$ , odnosno, osim normalnih naprezanja  $\sigma_x$  pojaviti će se i posmična naprezanja  $\tau_{xy}$  i  $\tau_{xz}$ .

Za promatrani dio štapa, uvesti ćemo šest uvjeta ravnoteže:



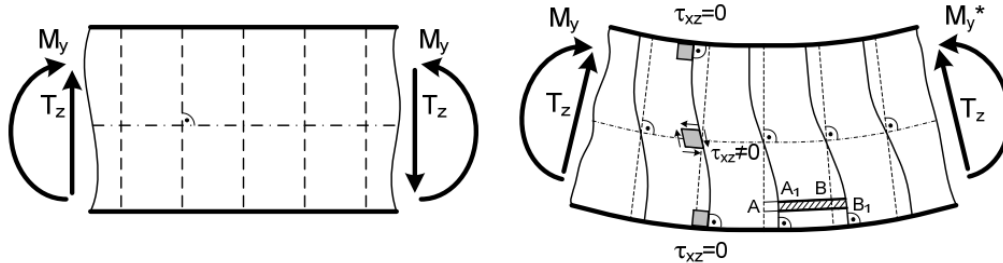
Slika 11. Primjer izdvojenog dijela štapa [2]

$$\begin{aligned}
 \sum F_x &= 0; \quad \int_A \sigma_x dA = 0 \\
 \sum F_y &= 0; \quad \int_A \tau_{xy} dA = 0 \\
 \sum F_z &= 0; \quad \int_A \tau_{xz} dA = T_z \\
 \sum M_x &= 0; \quad \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA = 0 \\
 \sum M_y &= 0; \quad \int_A \sigma_x z dA = M_y \\
 \sum M_z &= 0; \quad \int_A \sigma_x y dA = 0
 \end{aligned}$$

(24)

Zbog činjenice da na površini štapa ne djeluje opterećenje u smjeru osi štapa, prema zakonu o uzajamnosti posmičnih naprezanja, u točkama gornjeg i donjeg ruba poprečnoga presjeka, posmično je naprezanje  $\tau_{xz} = 0$ , s time i posmične deformacije  $\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = 0$ . Time je raspodjela prijašnje navedenih posmičnih naprezanja i deformacija nejednolika po visini poprečnoga presjeka. Zbog toga dolazi do **iskrivljenja**, odnosno, **vitoperenja** poprečnih presjeka. Na dijelu štapa gdje je poprečna sila konstantna, vitoperenje svih poprečnih presjeka će biti jednako. Pomak  $\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$ , tako da produljenje vlakna  $AB$ , a time i deformacija  $\varepsilon_{xx}$ , odnosno naprezanja  $\sigma_x$ , ne ovisi o tome ostaju li poprečni presjeci ravni ili ne. **Prema tome,**

izrazi za deformaciju i naprezanje dobiveni za čisto savijanje u potpunosti vrijede i u ovom slučaju savijanja silama. [1]



Slika 12. Primjer vitoperenja [2]

Ako se poprečna sila mijenja uzduž promatranog dijela štapa, iskrivljenje poprečnih presjeka na tom dijelu štapa biti će različito. Time možemo zaključiti da produljenje uzdužnih vlakana ovisi o iskrivljenju poprečnih presjeka.

Ako je duljina štapa  $l$  mnogo veća od visine poprečnog presjeka  $h$  ( $\frac{h}{l} \leq \frac{1}{5}$ ), može se pokazati da su u tom slučaju pomaci zbog vitoperenja presjeka mnogo manji od pomaka koji nastaju zbog rotacije poprečnog presjeka oko neutralne osi pri čistom savijanju. Uz navedene

pretpostavke analizom jednadžbi ravnoteže  $\int_A \sigma_x dA = 0$ ,  $\int_x \sigma_x z dA = M_y$  i

$\int_x \sigma_x y dA = 0$  dolazimo do prijašnje utvrđenog zaključka da izrazi  $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_y}$  i  $\sigma_x = \frac{M}{I_y} z$

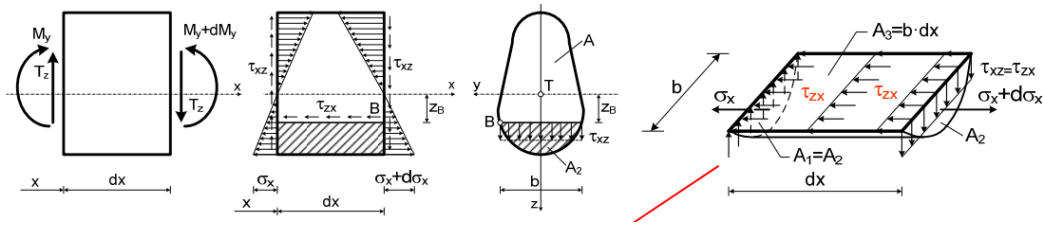
vrijede osim u situaciji čistog savijanja i kod savijanja silama. [1]

Od šest jednadžbi ravnoteže jedino je ostala jedna koja predstavlja vezu između poprečne sile  $T_z$  i posmičnih naprezanja  $\tau_{xz}$ .

$$\int_A \tau_{xz} dA = T_z \quad (25)$$

Određivanje posmičnih naprezanja  $\tau_{xy}$  u poprečnome presjeku odraditi ćemo putem konjugiranih posmičnih naprezanja jer je:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$



Slika 13. Primjer različitih presjeka štapova [2]

Uz Žuravskovu hipotezu koja glasi da smo pretpostavili da su po širini presjeka  $b(z)$  posmična naprezanja  $\tau_{xz}$  raspodijeljeno jednoliko, dolazimo do uvjeta ravnoteže svih sila u smjeru osi  $x$  koji glasi:

$$\sum F_x = - \int_{A_1} \sigma_x dA_1 - \int_{A_3} \tau_{zx} dA_3 + \int_{A_2} (\sigma_x + d\sigma_x) dA_2 = 0$$

(26)

Zbog male duljine elementa i pretpostavke o jednolikoj raspodjeli naprezanja  $\tau_{xz}$  po širini presjeka možemo smatrati da je posmično naprezanje  $\tau_{zx}$  konstantno na površini  $A_1 = b dx$  [2]

$$- \int_{A_1} \frac{M_y}{I_y} z dA_1 - \tau_{zx} b dx + \int_{A_2} \frac{M_y + dM_y}{I_y} z dA_2 = 0$$

(27)

Budući da je  $A_1 = A_2$ , dobivamo:

$$\tau_{zx} b dx - \frac{dM_y}{I_y} \int_{A_2} z dA_2 = 0$$

(28)

Odnosno:

$$\tau_{zx} = \frac{dM_y}{dx I_y b} \int_{A_2} z dA_2$$

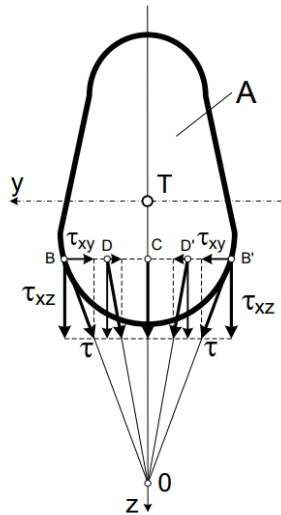
Uzimajući u obzir da je  $\frac{dM_y}{dx} = T_z$ ,  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ , a da integral  $\int_{A_2} z dA_2 = S_y$ , označuje statički moment površine odrezanog dijela presjeka  $A_2$ , odnosno  $A_1$  s obzirom na neutralnu os  $y$ , dobivamo izraz za posmično naprezanje [1]:

$$\tau_{xz} = \frac{T_z S_y}{b I_y}$$

(29)

## 2.5. POSMIČNA NAPREZANJA

U poprečnom presjeku, osim posmičnih naprezanja  $\tau_{xz}$  nalazimo i posmična naprezanja  $\tau_{xy}$



Slika 14. Primjer raspodjele posmičnih naprezanja  $\tau_{xz}$  i  $\tau_{xy}$  [2]

Naime, određenim metodama teorije elastičnosti, može se prikazati da su, u većini slučajeva, posmična naprezanja  $\tau_{xy}$  zanemariva, u odnosu na  $\tau_{xz}$  koja su usmjerena u smjeru poprečne sile  $T_z$ . Da izračunamo puno posmično naprezanje na konturu, koje je usmjereno u smjeru tangente na konturu, koristimo sljedeću formulu:

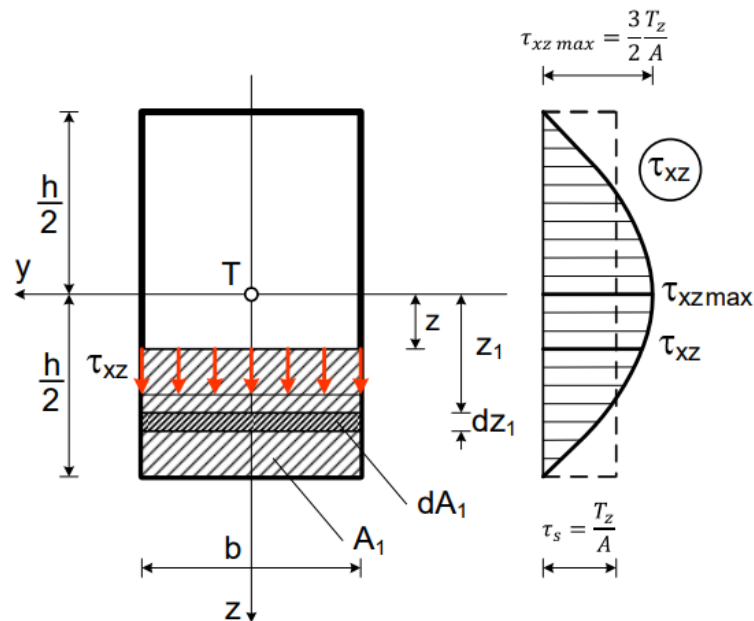
$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} \quad (30)$$

Također, može se odrediti i grafički ako se prethodno odrede posmična naprezanja  $\tau_{xz}$  prema izrazu (29). Ako izraz (30) nije usmjeren u smjeru tangente na konturu, onda je jednak nuli. U točkama B i B' na slici 13., nacrtamo pravokutni trokut u kojemu je kateta paralelna s osi z predstavlja posmično naprezanje  $\tau_{xz}$  u toj točki, a hipotenuza usmjerena u smjeru tangente na konturu, predstavlja smjer i ukupnu veličinu punoga posmičnoga naprezanja  $\tau$ . Ovime pokazujemo postojanje posmičnog naprezanja  $\tau_{xy}$ . U simetričnim točkama konture B, B' smjerovi vektora punog posmičnog naprezanja  $\tau$ , sijeku os simetrije z u točki O. Također, u simetričnim točkama (B, B' i D, D') posmična naprezanja  $\tau_{xy}$  su jednaka, ali suprotnog

predznaka, tako da im je rezultanta jednaka 0. Zbog te činjenice, njihovo postojanje se zanemaruje kod punih simetričnih presjeka pri standardnom proračunu čvrstoće. [1]

## Raspored posmičnih naprezanja $\tau_{xz}$ za neke karakteristične poprečne presjeke

### a) Pravokutni presjek



Slika 15. Primjer raspodjele posmičnih naprezanja za pravokutni presjek [2]

Kod pravokutnog presjeka, moment tromosti iznosi  $I_y = \frac{bh^3}{12}$ , a širina presjeka  $b(z) = b = konst..$  Statički moment djela presjeka označen površinom  $A_1$ , u odnosu na neutralnu os  $y$  izražavamo relacijom:

$$S_y = \int_{A_1} z_1 dA_1 = \int_z^{\frac{h}{2}} z_1 b z_1 = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \quad (31)$$

Prema izrazu (29), posmično naprezanje  $\tau_{xz}$  na udaljenosti  $z$  od neutralne osi iznosi:

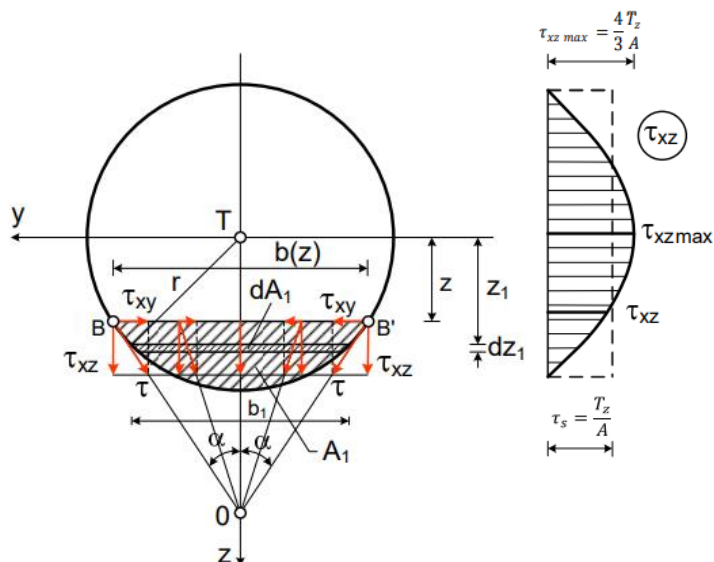
$$\tau_{xz} = \frac{T_z S_y}{b I_y} = \frac{6T_z}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \quad (32)$$

Vidimo da su posmična naprezanja raspodijeljena po zakonu kvadratne parabole po visini pravokutnoga presjeka. U krajnjim vlaknima ( $z = \frac{h}{2}$ ) posmično je naprezanje jednako nuli, a maksimalnu vrijednost prima u visini neutralne osi presjeka ( $z = 0$ ) [2]

$$\tau_{xz \max} = \frac{3 T_z}{2 b h} = \frac{3 T_z}{2 A} \quad (33)$$

Prema tome, maksimalno naprezanje je 50% veće od srednjeg naprezanja, koje bismo dobili pri jednolikoj raspodjeli posmičnih naprezanja po presjeku.

### b) Kružni presjek



Slika 16. Primjer raspodjele posmičnih naprezanja za kružni presjek [2]



Za kružni presjek moment tromosti računamo pomoću  $I_y = \frac{\pi r^4}{4}$  te  $b(z) = 2\sqrt{r^2 - z^2}$ , a statički moment površine označenog s  $A_1$  s obzirom na neutralnu os  $y$ ,  $S_y = \int_{A_1} z_1 dA_1$ , gdje je  $dA_1 = b_1 dz_1 = 2\sqrt{r^2 - z_1^2}$ , tako dobivamo [2]:

$$S_y = \int_{A_1} z_1 dA_1 = 2 \int_z^r z_1 \sqrt{r^2 - z_1^2} dz_1 = \frac{2}{3} (r^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} \quad (34)$$

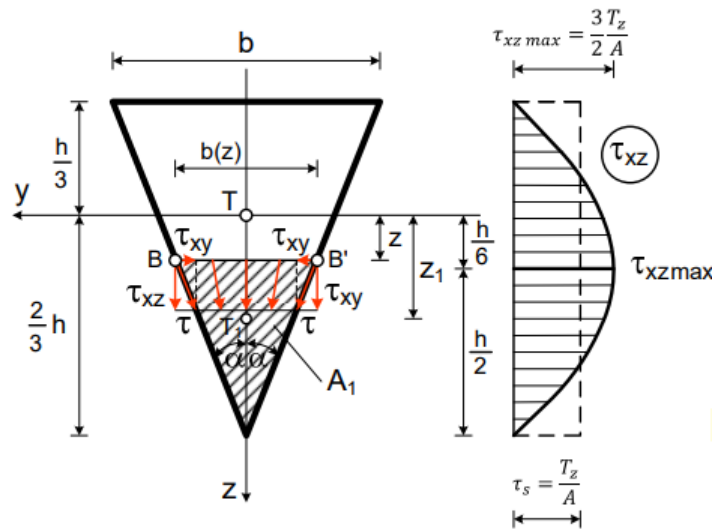
Ako u to uvrstimo izraz (29), dobivamo:

$$\tau_{xz} = \frac{T_z S_y}{b I_y} = \frac{T_z \frac{2}{3} (r^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}}{I_y 2(r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{T_z}{3I_y} (r^2 - z^2)$$

Ili

$$\tau_{xz} = \frac{T_z}{3 \frac{\pi r^4}{4}} (r^2 - z^2) = \frac{4}{3} \frac{T_z}{\pi r^4} (r^2 - z^2) \quad (35)$$

## c) Trokutni presjek



Slika 17. Primjer raspodjele posmičnih naprezanja za trokutni presjek [2]

Površinu ispruganog dijela presjeka dobiti ćemo preko formule  $A_1 = \frac{b(z)}{2} \left(\frac{2}{3} h - z\right)$ , a udaljenost težišta ispruganog dijela od  $y$  preko  $z_1 = z + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} h - z\right) = \frac{2}{3} \left(\frac{h}{3} + z\right)$  te njezin statički moment s obzirom na os  $y$  preko  $S_y = A_1 z_1 = \frac{b(z)}{2} \left(\frac{2}{3} h - z\right) \left(\frac{h}{3} + z\right)$ . Moment tromosti trokuta iznosi  $I_y = \frac{bh^3}{36}$ . Ako to uvrstimo u izraz (29), dobivamo [2]:

$$\tau_{xz} = \frac{T_z S_y}{b(z) I_y} = \frac{12T_z}{bh^3} \left(\frac{2}{3} h - z\right) \left(\frac{h}{3} + z\right). \quad (36)$$

Vidimo da su posmična naprezanja  $\tau_{xz}$  po visini presjeka raspodijeljena po zakonu kvadratne parabole. U krajnjim vlaknima su naprezanja jednaka nuli. Mjesto maksimalnoga posmičnoga naprezanja odrediti ćemo pomoću [1]:

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{S_y}{b(z)} \right) = \frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} h - z\right) \left(\frac{h}{3} + z\right) \right] = 0 \quad (37)$$

A odatle dobivamo:

$$z = \frac{h}{6}$$

Prema tome, maksimalno posmično naprezanje se nalazi na udaljenosti od  $z = \frac{h}{6}$  od neutralne osi presjeka, odnosno u sredini visine presjeka iznosi:

$$\tau_{xz \max} = 3 \frac{T_z}{b h} = \frac{3 T_z}{2 A} \quad (38)$$

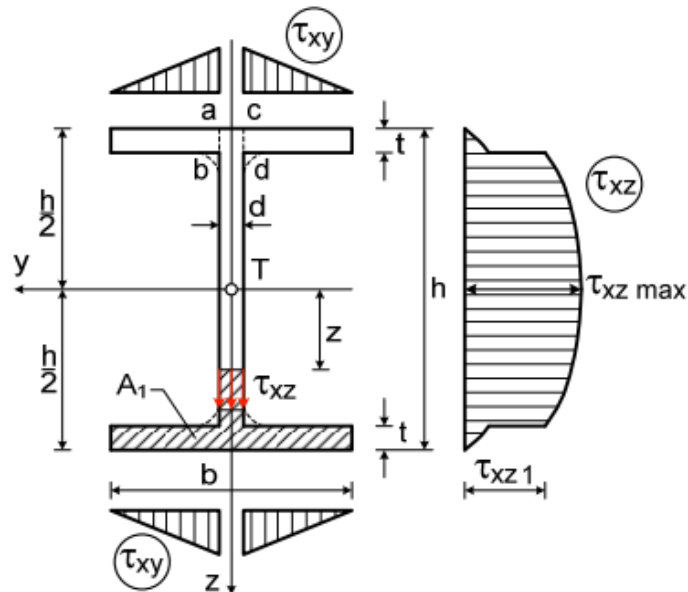
Puno posmično naprezanje u točki B iznosi:

$$\tau = \frac{\tau_{xz}}{\cos \alpha}$$

A maksimalno puno posmično naprezanje:

$$\tau_{\max} = \frac{3 T_z}{2 A \cos \alpha} \quad (39)$$

#### d) I-presjek



Slika 18. Primjer raspodjele posmičnih naprezanja za I-presjek [2]

Pri određivanju posmičnih naprezanja  $\tau_{xz}$  u vertikalnoj stijenci, statički moment površine  $A_1$  u odnosu na neutralnu os je:

$$\begin{aligned} S_y &= \int_{A_1} z_1 dA_1 = \frac{b t (h - t)}{2} + d \left( \frac{h}{2} - t - z \right) \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} - t + z \right) = \\ &= \frac{b t (h - t)}{2} + \frac{d}{2} \left[ \left( \frac{h}{2} - t \right)^2 - z^2 \right] \end{aligned}$$

Ako to uvrstimo u izraz (29) dobivamo izraz za posmično naprezanje u rebu:

$$\tau_{xz} = \frac{T_z S_y}{b(z)I_y} = \frac{T_z b t (h - t)}{2 d I_y} + \frac{T_z \left[ \left( \frac{h}{2} - t \right)^2 - z^2 \right]}{2 I_y} \quad (40)$$

Što se tiče određivanja posmičnih naprezanja  $\tau_{xz}$  u pojasevima, izraz za statički moment površine odrezanog dijela presjeka  $A_1$  s obzirom na neutralnu os, glasi [2]:

$$S_y = \int_{A_1} z_1 dA_1 = b \left( \frac{h}{2} - z \right) \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + z \right) = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

Te uvrštavanjem u izraz (29), dobivamo izraz za posmično naprezanje  $\tau_{xz}$  u pojasu:

$$\tau_{xz} = \frac{T_z S_y}{b(z)I_y} = \frac{T_z}{2 I_y} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \quad (41)$$

Iz izraza (40) i (41) vidimo da se posmična naprezanja  $\tau_{xz}$  po visini nosača mijenjaju po zakonu kvadratne parabole.

Dijagram posmičnih naprezanja prikazan je na slici 15. Na spoju rebra i pojasa, širina presjeka  $b$  naglo se mijenja, pa pri prelasku iz pojasa u rebro, posmična naprezanja naglo rastu, tako da u visini spoja pojasa i rebra u dijagramu  $\tau_{xz}$  postoji nagli skok. [1]

Najveće se posmično naprezanje pojavljuje na neutralnoj osi ( $z = 0$ ) i iznosi:

$$\tau_{xz} = \frac{T_z b t (h - t)}{2 d I_y} + \frac{T_z \left(\frac{h}{2} - t\right)^2}{2 I_y} \quad (42)$$

A posmično naprezanje u rebu u visini spoja rebra i pojasa ( $z = \frac{h}{2} - t$ )

$$\tau_{xz} = \frac{T_z b t (h - t)}{2 d I_y} \quad (43)$$

Prema zakonu uzajamnosti posmičnih naprezanja, u točkama gornjeg i donjeg ruba, posmična naprezanja  $\tau_{xz}$  su jednaka nuli.

Ako je debljina pojasa  $t$  mala, posmična naprezanja  $\tau_{xz}$  raspoređena po debljini pojasa su zanemarivo mala, osim u području pravokutnika  $abcd$  (prikazano na slici 15.).

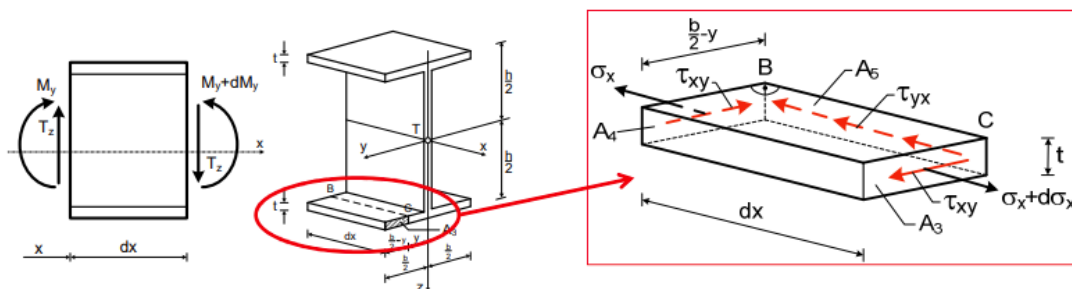
Integracijom izraza (40) po površini rebra, dobiti ćemo rezultantu koja iznosi oko  $0,95 T_z$ .

Iz toga slijedi da pravokutnik  $abcd$  i njegov odgovarajući donji pravokutnik, primaju samo neznatni dio poprečne sile, zato i posmična naprezanja  $\tau_{xz}$  u tim pravokutnicima ne mogu biti velika. [1]

$$\tau_{xz \max} \approx \frac{T_z}{A_r}$$

Izvan pravokutnika  $abcd$ , posmična naprezanja su približno jednaka nuli, ali se pojavljuju posmična naprezanja  $\tau_{xy}$  koja su paralelna sa pojasevima. Za uski pojas ( $t \ll b$ ) pretpostavljamo da su ta naprezanja jednoliko raspodijeljena po debljini pojasa. [1]

Da odredimo ta posmična naprezanja  $\tau_{xy}$  presjeći ćemo pojas vertikalnom ravninom BC.



Slika 19. Prikaz presijecanja pojasa vertikalnom ravninom [2]

Na površini  $A_4$  djeluju normalna naprezanja  $\sigma_x$ , a na površini  $A_3$   $\sigma_x + d\sigma_x$ . Da bi promatrani element pojasa bio u ravnoteži, na površini  $A_5$  moraju se pojaviti posmična naprezanja  $\tau_{yx}$ . Prema zakonu o uzajamnosti posmičnih naprezanja, na površini  $A_3$  i  $A_4$  pojavljuju se posmična naprezanja  $\tau_{xy}$ . Uvjet ravnoteže za promatrani element pojasa jest [1]:

$$\sum F_x = \int_{A_3} (\sigma_x + d\sigma_x) dA_3 - \int_{A_4} \sigma_x dA_4 - \tau_{yx} t dx = 0$$

Ili:

$$\int_{A_3} \frac{M + dM}{I_y} z dA_3 - \int_{A_4} \frac{M}{I_y} z dA_4 - \tau_{yx} t dx = 0$$

Budući da je  $A_3 = A_4$ , biti će:

$$\tau_{yx} = \frac{dM}{dx I_y t} \int_{A_3} z dA_3$$

Uzmemo li u obzir da je

$$\frac{dM}{dx} = T_z, \tau_{yx} = \tau_{xy}, \text{ a da integral } \int_{A_3} z dA_3 = S_y$$

označuje statički moment površine ispruganog dijela pojasa  $A_3$  s obzirom na os  $y$ , dobivamo:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \frac{T_z S_y}{I_y t} \tag{44}$$

Gdje je:

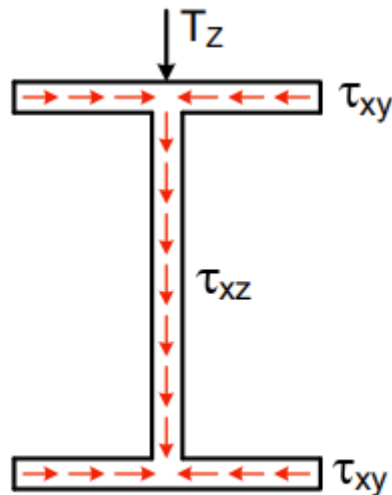
$$S_y = \int_{A_3} z dA_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{b}{2} - y \right) t (h - t)$$

Pa dobivamo:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \frac{T_z}{2 I_y} \left( \frac{b}{2} - y \right) t (h - t) \tag{45}$$

A od tamo slijedi da se  $\tau_{xy}$  i  $\tau_{yx}$  mijenjaju po linearnom zakonu.

Da smo promatrali ravnotežu elemenata izrezanog na desnom kraju, dobili bi isti izraz za posmično naprezanje, ali u suprotnome smjeru. Da smo promatrali gornji pojas, dobili bismo obrnutu sliku. [2]



Slika 20. Prikaz ravnoteže elementa izrezanog na desnom kraju pojasa [2]

$$\tau_{yx} = \frac{T_z S_y}{I_y t}$$

$$\tau_{xz} = \frac{T_z}{2 I_y} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

$$\tau_{yx} = \frac{T_z S_y}{I_y t}$$

Ako je ravnina opterećenja okomita na ravninu rebra ,posmična naprezanja u rebru su približno jednaka nuli, a mijenjaju se uzduž svakog pojasa po zakonu parabole. [2]

$$\tau_{xz} = \frac{T_z}{2 I_y} \left( \frac{b^2}{4} - z^2 \right)$$

(46)

## 2.6. GLAVNA NAPREZANJA I TRAJEKTORIJE NAPREZANJA

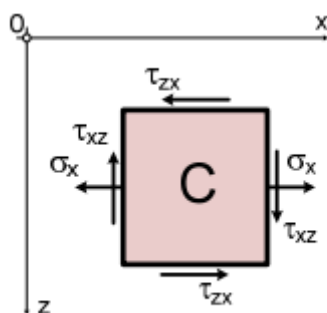
Pri savijanju silama u poprečnim presjecima djeluju normalna i posmična naprezanja :

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z$$

$$\tau_{xz} = \frac{T_z S_y}{I_y b}$$

U uzdužnim presjecima, usporedno s neutralnim slojem djeluju posmična naprezanja  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ , a normalna naprezanja  $\sigma_z = 0$  prema prije usvojenoj pretpostavci. [2]

Tako je u nekoj promatranoj točki C, pri savijanju silama postoji ravninsko stanje naprezanja



21.) Primjer ravninskog stanja naprezanja za proizvoljnu C točku [2]

Glavna naprezanja i njihove smjerove u promatranoj točki C možemo odrediti na sljedeći način:

$$\sigma_1 = \sigma_{max} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xz}^2}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{min} = \frac{\sigma_x}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xz}^2}$$

(47)

Smjerove glavnih naprezanja određujemo preko:

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x}$$

(48)

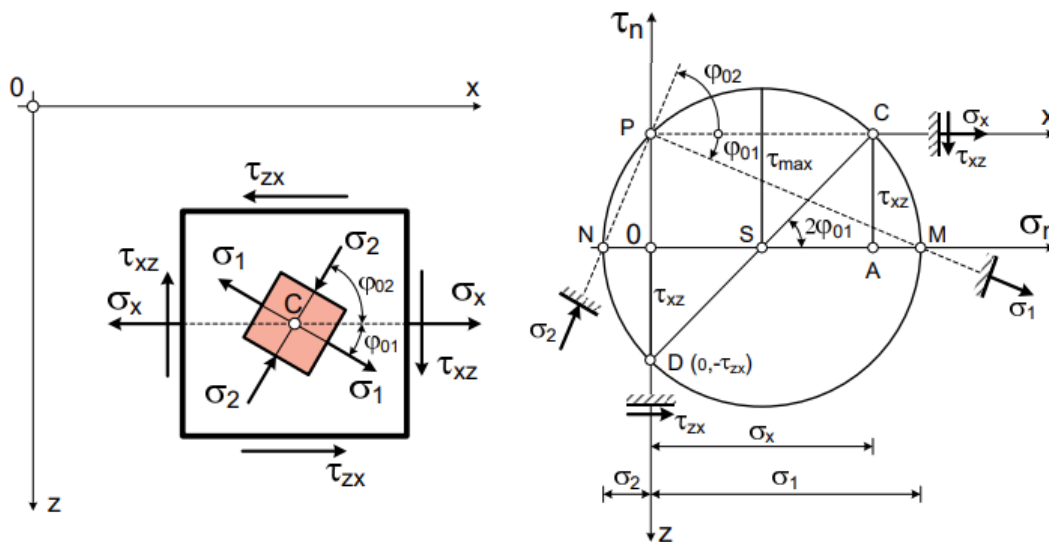


Ili preko izraza:

$$\tan \varphi_0 = \frac{\tau_{xz}}{\sigma_1}$$

$$\tan \varphi_0 = \frac{\tau_{xz}}{\sigma_2}$$

(49)

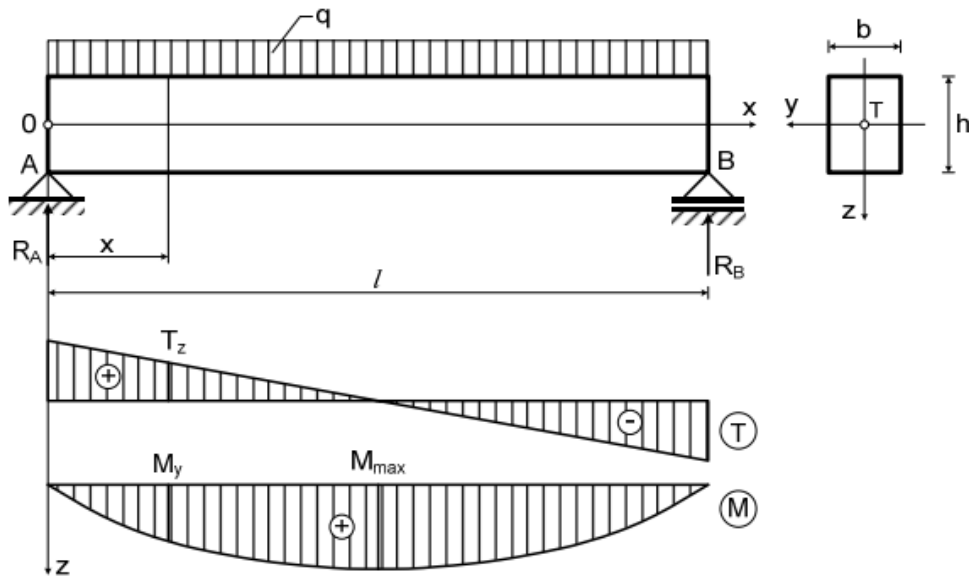


Slika 22.) Prikaz Mohrove kružnice za ravninsko stanje naprezanja [2]

U presjecima pod nagibom od  $45^\circ$  prema smjerovima glavnih naprezanja djeluju ekstremna posmična naprezanja. Ta naprezanja određujemo izrazom [2]:

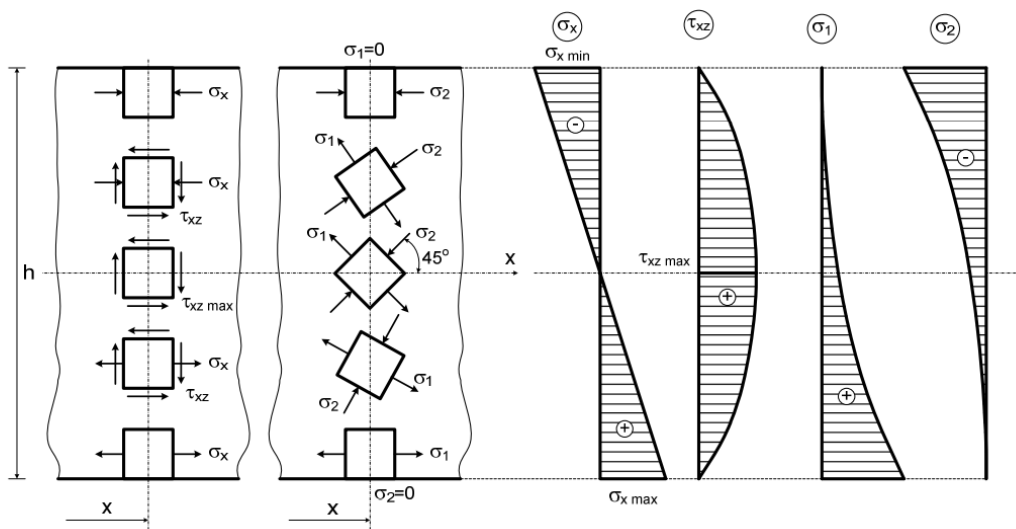
$$\tau_{1,2} = \tau_{\max/\min} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xz}^2}$$

(50)



Slika 23.) Prikaz nosača pravokutnog poprečnog presjeka [2]

Na slici je prikazan nosač pravokutnog poprečnog presjeka koji je opterećen jednoliko kontinuiranim opterećenjem  $q$ . U presjeku  $x$  djeluju unutarnje sile  $T_z$  i  $M_y$ . U pojedinim točkama možemo izračunati normalna i posmična naprezanja, glavna naprezanja i njihove smjerove sa izrazima (47), (48) i (49) [1].



Slika 24.) Prikaz stanja naprezanja u pojedinim točkama poprečnoga presjeka te dijagrami normalnih, posmičnih, glavnih normalnih i glavnih posmičnih naprezanja [2]

U krajnjim vlaknima je  $\tau_{xz} = 0$ , u krajnjem rastegnutom vlaknu (donji rub) je  $\sigma_1 = \sigma_x$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\varphi_{01} = 0$  te  $\varphi_{02} = 90^\circ$ . U krajnjem pritisnutom vlaknu (gornji rub) je  $\sigma_2 = -\sigma_x$ ,  $\sigma_1 = 0$ ,  $\varphi_{01} = 0$  te  $\varphi_{02} = 90^\circ$ . Na neutralnoj osi je stanje čistog posmika. Odnosno,  $\tan 2\varphi_0 = \pm\infty$ ,  $\varphi_{12} = \pm 45^\circ$ ,  $\sigma_1 = +\tau_{xz \max}$ ,  $\sigma_2 = -\tau_{xz \max}$ . [2]

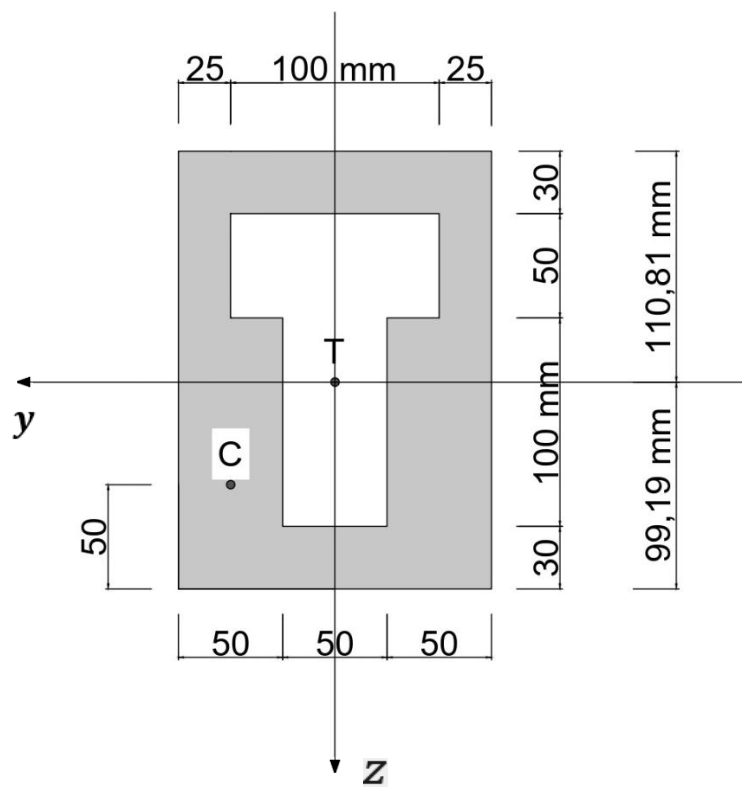
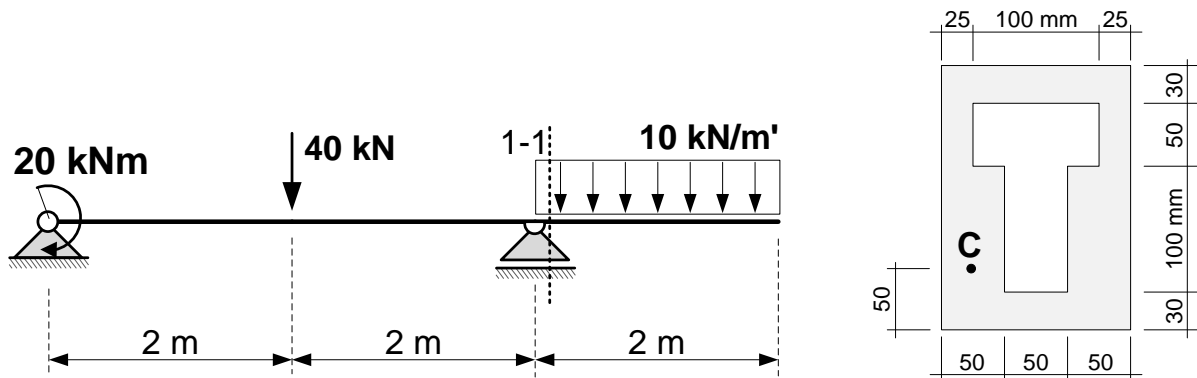
Iz slike 20.) se vidi da se pri prijelazu od krajnje rastegnutih vlakana prema krajnje pritisnutim vlaknima smjerovi glavnih naprezanja zaokreću za  $90^\circ$  u smjeru kazaljke na satu. U vertikalnom presjeku štapa možemo odrediti polje smjerova glavnih naprezanja i u njemu konstruirati dva sustava ortogonalnih krivulja. Tangente tih krivulja u svakoj točki imaju smjerove glavnih naprezanja. [2]

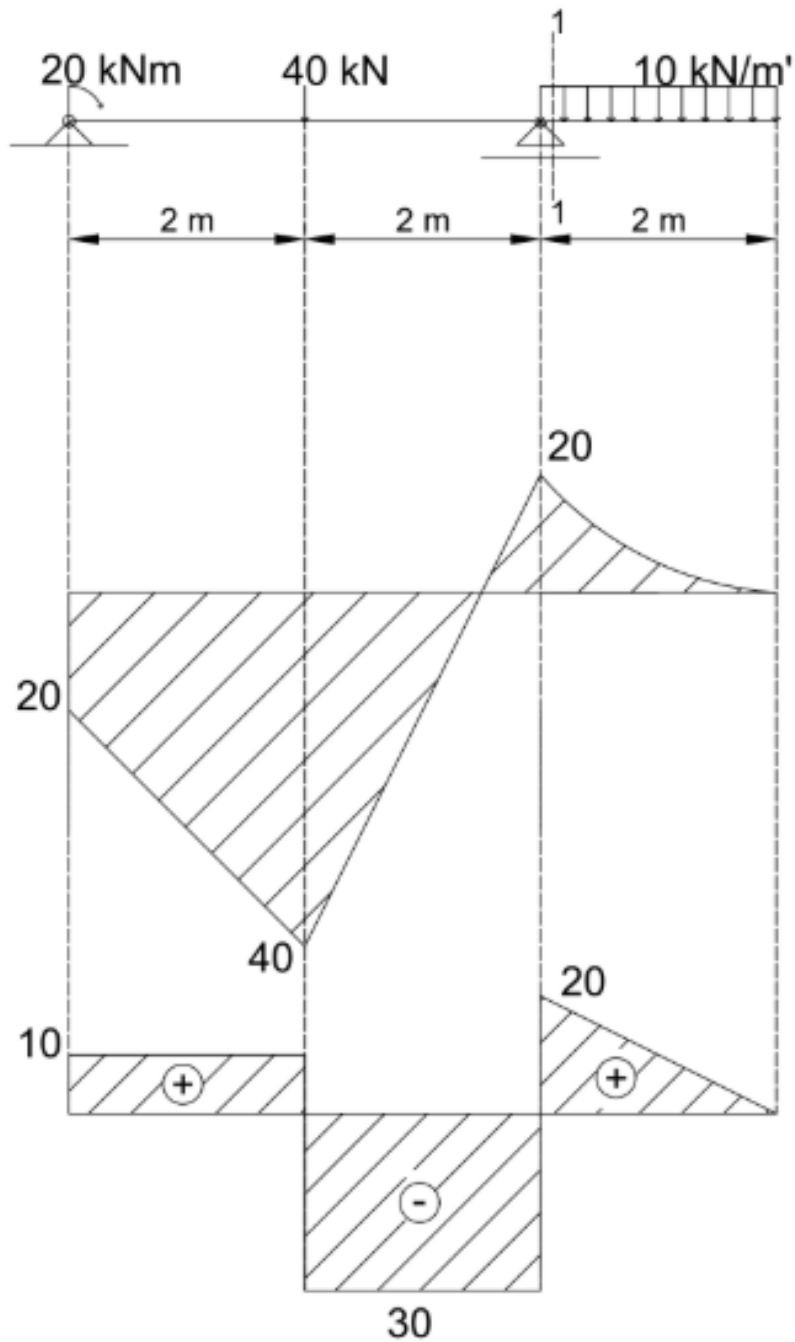
### 3. NUMERIČKI PRIMJER

#### 3.1. Prvi numerički primjer – maksimalna normalna i posmična naprezanja

1. Za nosač prikazan na slici treba odrediti:

a) maksimalna normalna i posmična naprezanja te nacrtati odgovarajuće dijagrame u najviše napregnutim presjecima;





Slika 25.) Dijagrami momenta (prvi dijagram) i poprečnih sila (drugi dijagram) od vanjskih sila

Postupak rješavanja:

Prvi korak je odrediti reakcije u ležajevima kako bismo mogli napraviti momentni dijagram te dijagram sila za zadani slučaj. Reći ćemo da je nepomični ležaj točka A, a klizni ležaj točka B.

Odmah nam je jasno da možemo eliminirati jednadžbe ravnoteže za horizontalne sile jer sustav nije opterećen horizontalnom silom, dakle horizontalna reakcija u točki A neće postojati.

Nakon toga možemo početi uvoditi jednadžbe ravnoteže:

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0, \\ -20 - 40 \times 2 + R_B \times 4 - 20 \times 5 &= 0 \\ R_B &= 50 \text{ kN} \\ \sum F_Z &= 0 \\ -R_A + 40 + 20 - 50 &= 0 \\ R_A &= 10 \text{ kN} \end{aligned}$$

Drugi korak je da izračunamo površinu i pronalazimo poziciju težišta presjeka:

$$\begin{aligned} A &= 150 \times 210 - 50 \times 100 - 50 \times 100 = 21500 \text{ mm}^2 \\ z_t &= \frac{\sum z_{ti} \times A_i}{\sum A_i} \\ z_t &= \frac{210 \times 150 \times 105 - 50 \times 100 \times 80 - 50 \times 100 \times 155}{21500} \\ z_t &= 99,19 \text{ mm} \end{aligned}$$

Sljedeći korak je da izračunamo moment tromosti presjeka.

$$I_y = \frac{150 \times 210^3}{12} + 150 \times 210 \times (105 - 99,19)^2 - \frac{100 \times 50^3}{12} - 100 \times 50 \times (155 - 99,19)^2 - \frac{50 \times 100^3}{12} - 50 \times 100 \times (99,19 - 80)^2$$

$$I_y = 94202422,82 \text{ mm}^4 = 94,2 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Nakon toga, izračunavamo statičke momente.

$$S_y = A \times y_t$$

$$S_{y,max} = 150 \times 110,81 \times \frac{110,81}{2} - 100 \times 50 \times (110,81 - 55) - 50 \times 30,81 \times \frac{30,81}{2}$$

$$S_{y,max} = 618132,81 \text{ mm}^3 = 61,81 \times 10^4 \text{ mm}^3$$

$$S_y^{2,3} = 150 \times 30 \times 95,81 = 431145 \text{ mm}^3 = 43,11 \times 10^4 \text{ mm}^3$$

$$S_y^{4,5} = 150 \times 80 \times 70,81 - 50 \times 100 \times 55,81 = 570670 \text{ mm}^3 = 57,06 \times 10^4 \text{ mm}^3$$

Zatim na grafu nalazimo maksimalni moment i maksimalnu poprečnu silu.

$$M_{max} = 40 \text{ kNm}$$

$$T_{max} = 30 \text{ kN}$$

Nakon toga, odredimo 5 različitih točaka na promjeni geometrije kako bismo saznali promjenu posmičnih naprezanja ne promjeni geometrijskog oblika presjeka te njihovu raspodjelu po visini presjeka.

$$\tau_{xz} = \frac{T_z \times S_y}{I_y \times b}$$

$$\tau_2 = \frac{30 \times 10^3 \times 43,11 \times 10^4}{94,2 \times 10^6 \times 150} = 0,92 \text{ MPa}$$

$$\tau_3 = \frac{30 \times 10^3 \times 43,11 \times 10^4}{94,2 \times 10^6 \times 50} = 2,75 \text{ MPa}$$

$$\tau_4 = \frac{30 \times 10^3 \times 57,06 \times 10^4}{94,2 \times 10^6 \times 50} = 3,63 \text{ MPa}$$

$$\tau_5 = \frac{30 \times 10^3 \times 57,06 \times 10^4}{94,2 \times 10^6 \times 100} = 1,82 \text{ MPa}$$

$$\tau_T = \frac{30 \times 10^3 \times 61,81 \times 10^4}{94,2 \times 10^6 \times 100} = 1,97 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x^{gore} = \frac{40 \times 10^6}{94,2 \times 10^6} \times 110,81 = 47,05 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x^{dolje} = -\frac{40 \times 10^6}{94,2 \times 10^6} \times 99,19 = -42,12 \text{ MPa}$$

Da izračunamo maksimalno naprezanje u točki C

**Presjek 1-1**

$$M = 20 \text{ kNm}$$

$$T = 20 \text{ kN}$$

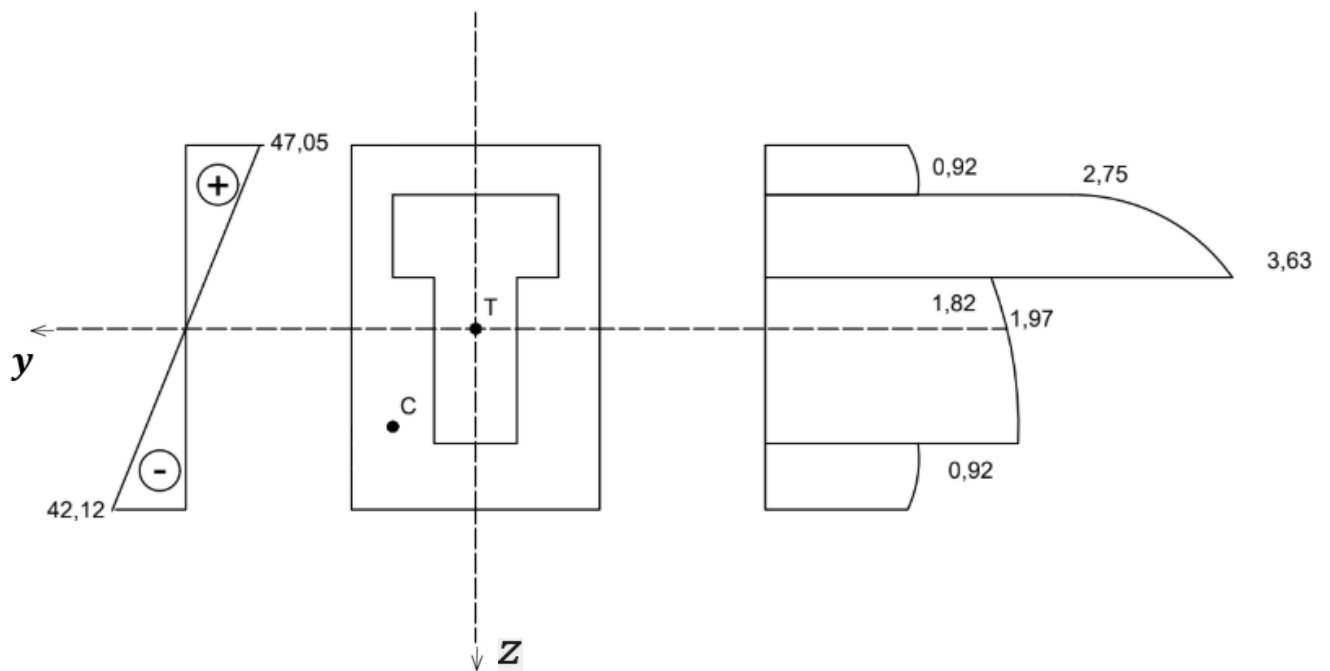
$$\sigma_{x,c} = \frac{20 \times 10^6}{94,2 \times 10^6} \times \mp 50 = \mp 10,62 \text{ MPa}$$

$$S_y^c = 150 \times 50 \times 74,19 - 20 \times 50 \times 59,19 = 497235 \text{ mm}^3$$

$$= 49,72 \times 10^4 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{x,z}^c = \frac{20 \times 10^3 \times 49,72 \times 10^4}{94,2 \times 10^6 \times 100} = 1,05 \text{ MPa}$$





Slika 26.) Prikaz dijagrama maksimalnih i minimalnih glavnih naprezanja te posmičnih naprezanja

### 3.2. Drugi numerički primjer – Izračun veličine i smjera glavnih naprezanja u točki

**C**

b) veličinu i smjer glavnih naprezanja u točki C presjeka 1-1 (skicirati trajektorije naprezanja u točki C).

Da izračunamo maksimalno naprezanje u točki C

#### Presjek 1-1

$$M = 20 \text{ kNm}$$

$$T = 20 \text{ kN}$$

$$\sigma_{x,c} = \frac{20 \times 10^6}{94,2 \times 10^6} \times \mp 50 = \mp 10,62 \text{ MPa}$$

$$S_y^c = 150 \times 50 \times 74,19 - 20 \times 50 \times 59,19 = 497235 \text{ mm}^3$$

$$= 49,72 \times 10^4 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{x,z}^c = \frac{20 \times 10^3 \times 49,72 \times 10^4}{94,2 \times 10^6 \times 100} = 1,05 \text{ MPa}$$

Na kraju zadatka moramo izračunati smjerove naprezanja u točki C.

$$\sigma_1 = \sigma_{max} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \times \tau_{x,z}^2}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{max} = \frac{\sigma_x}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \times \tau_{x,z}^2}$$

$$\sigma_1 = \sigma_{max} = \frac{10,62}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{10,62^2 + 4 \times 1,05^2}$$

$$\sigma_1 = 10,72 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{max} = \frac{10,62}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{10,62^2 + 4 \times 1,05^2}$$

$$\sigma_2 = -0,1 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2 \times \tau_{x,z}}{\sigma_x}$$

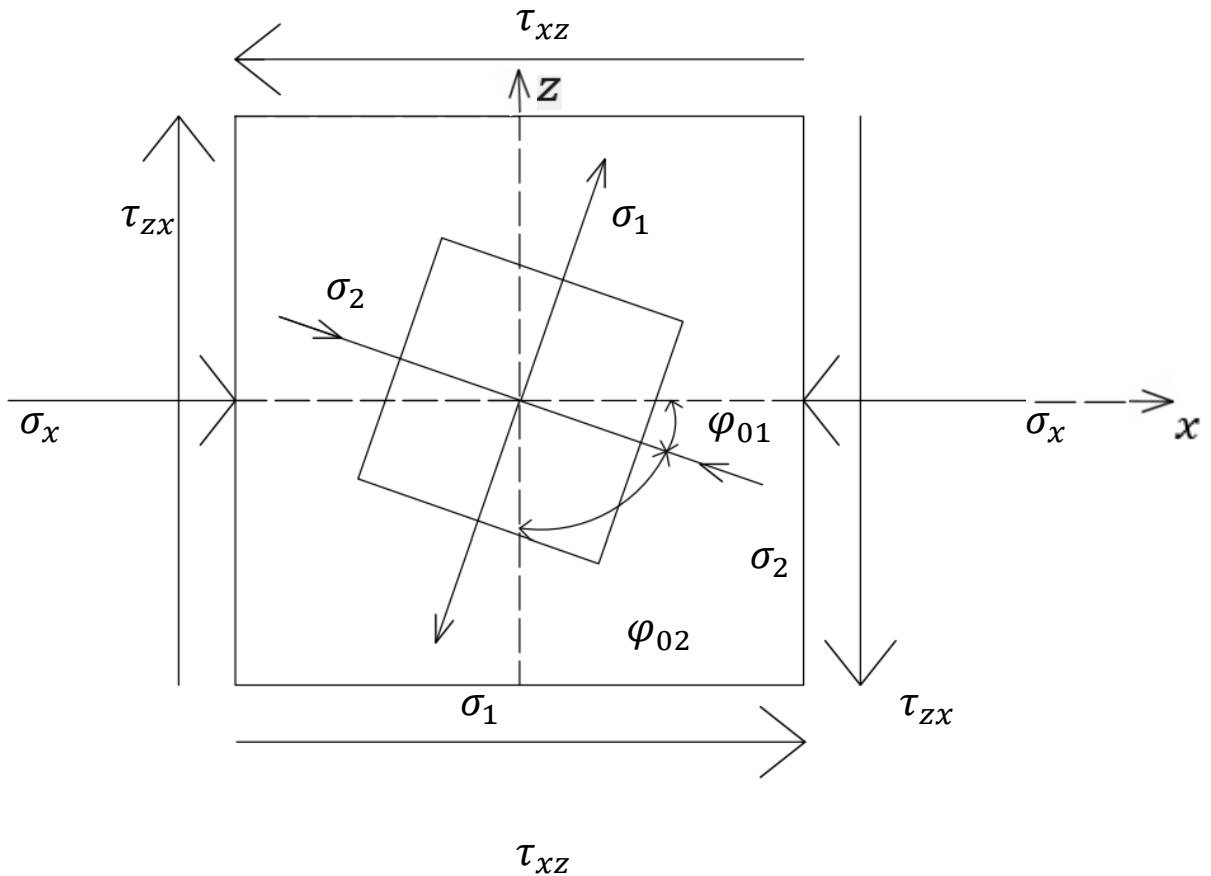
$$\tan \varphi_{01} = \frac{\tau_{x,z}}{\sigma_1}$$

$$\tan \varphi_{02} = \frac{\tau_{x,z}}{\sigma_2}$$

$$\tan 2\varphi_0 = 0,196 = 11,08^\circ$$

$$\tan \varphi_{01} = 5,65^\circ$$

$$\tan \varphi_{02} = 84,56^\circ$$



Slika 26.) Prikaz trajektorija glavnih naprezanja

## 4. ZAKLJUČAK

U ovom radu detaljno smo obradili temu određivanja naprezanja u gredi, što je ključan aspekt u projektiranju i izvedbi građevinskih konstrukcija. Analizirali smo naprezanja koja se pojavljuju u opterećenoj gredi te smo odredili proračun za svako navedeno naprezanje. Dublje smo ušli u razmatranje čistog savijanja, neutralne osi, normalnih naprezanja, savijanja silama ili poprečnog savijanja, poprečnih naprezanja te glavnih naprezanja i njihovih trajektorija. Posebice smo se bavili posmičnim naprezanjima te značajnosti geometrije kod istih.

Grafičkim primjerom smo pokazali kako se provodi analiza naprezanja, trajektorije i veličine glavnih naprezanja te njihova skica. Također smo pokazali dijagrame naprezanja uzrokovane vanjskim i unutarnjim silama.

Analizom obje smo dokučili da osim vanjskih sila i vanjskog oblika grede, odnosno globalnog sustava cijele grede, geometrija kritičnog presjeka ima najveću ulogu pri određivanju naprezanja.

## POPIS LITERATURE

- [1] Šimić V. *Otpornost materijala 1*. Zagreb: Školska knjiga; 2002.
- [2] Koščak J., *Otpornost materijala 1 8. Predavanje. Sveučilište u Zagrebu Građevinski fakultet.*

Dostupno:

[https://www.grad.unizg.hr/\\_download/repository/8\\_\\_predavanje%5B1%5D.pdf](https://www.grad.unizg.hr/_download/repository/8__predavanje%5B1%5D.pdf)

[Pristupljeno: 19. siječnja 2025.]